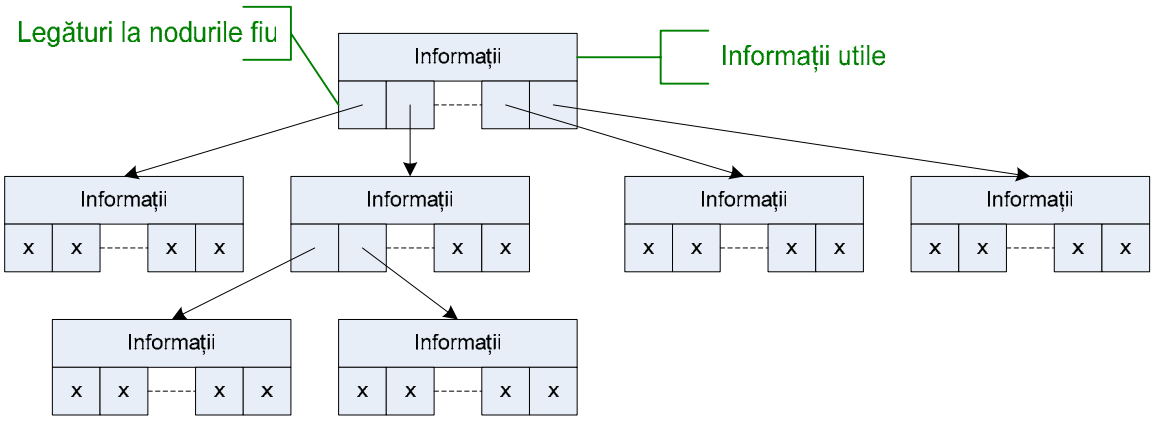
Arbori

Arborii sunt structuri de date dinamice şi omogene. Cele mai comune utilizări ale arborilor sunt căutarea în volume mari de date şi reprezentarea de structuri organizate ierarhic.

1. Arbori oarecare

Arborii oarecare sunt colecţii de noduri care conţin informaţia utilă şi legături către descendenţi. Fiecare arbore conţine un nod iniţial numit rădăcină.

Structura unui arbore oarecare este prezentată în figura următoare:



Pentru implementarea unui arbore oarecare în C/C++ se poate folosi o structură de forma:

```
// tipul de date al informatiilor utile
typedef double TipArbore;

// structura care reprezinta un nod din arbore
struct NodArbore
{
        // informatiile utile stocate in nod
        TipArbore Informatii;

        // numarul de legaturi catre fii
        int numarLegaturi;

        // vector de legaturi catre fii
        NodArbore **Legaturi;
};
```

Fiecare nod conţine informaţiile utile, un întreg care reţine numărul de fii şi un vector de pointeri către fii.

Principalele operaţii care pot fi implementate pe un arbore oarecare sunt:

Operaţie	Descriere
Adăugare nod	Adaugă un nod în arbore după un anumit criteriu (de exemplu la un anumit nod părinte). Operaţia presupune alocarea memoriei pentru nod, copierea informaţiei utile şi modificarea legăturii părintelui.

Ştergere nod	Presupune dealocarea memoriei pentru nodul respectiv şi pentru toţi descendenţii săi şi modificarea legăturii părintelui.
Parcurgere arbore	Presupune obţinerea unei liste care conţine toate informaţiile utile din arbore.
Căutare element	Presupune obţinerea unui pointer la un nod pe baza unui criteriu de regăsire.

Exemplu de operaţie – ştergerea unui nod:

```
// sterge un nod din arbore primind ca parametru
// o referinta la legatura parintelui
void StergereNod(NodArbore* &legaturaParinte)
{
	// stergem nodul si subarborele corespunzator
	StergereSubarbore(legaturaParinte);

	// modificam legatura paeintelui
	legaturaParinte = NULL;
}

// sterge recursiv un subarbore
void StergereSubarbore(NodArbore *nod)
{
	// conditia de oprire din recursie
	if (nod == NULL)
		return;

	// stergem subarborii
	for (int i = 0; i < nod->numarLegaturi; i++)
		StergereSubarbore(nod->Legaturi[i]);

	// stergem nodul curent
	delete [] nod->Legaturi;	// stergem vectorul de legaturi
	delete [] nod;			// stergrm nodul
}
```

2. Arbori binari

Arborii binari sunt arbori în care nodurile conţin cel mult doi descendenţi. Pentru memorarea acestor arbori se poate folosi o structură mai simplă de forma:

```
// tipul de date al informatiilor utile
typedef double TipArbore;

// structura care reprezinta un nod
// dintr-un arbore binar
struct NodArbore
{
	// informatiile utile stocate in nod
	TipArbore Informatii;

	// vector de legaturi catre fii
	NodArbore *Stanga, *Dreapta;
};
```

Operaţiile sunt aceleaşi ca şi în cazul arborilor oarecare.

Exemplu: parcurgerea arborelui în ordinea stânga – rădăcină - dreapta şi stocarea elementelor într-o listă:

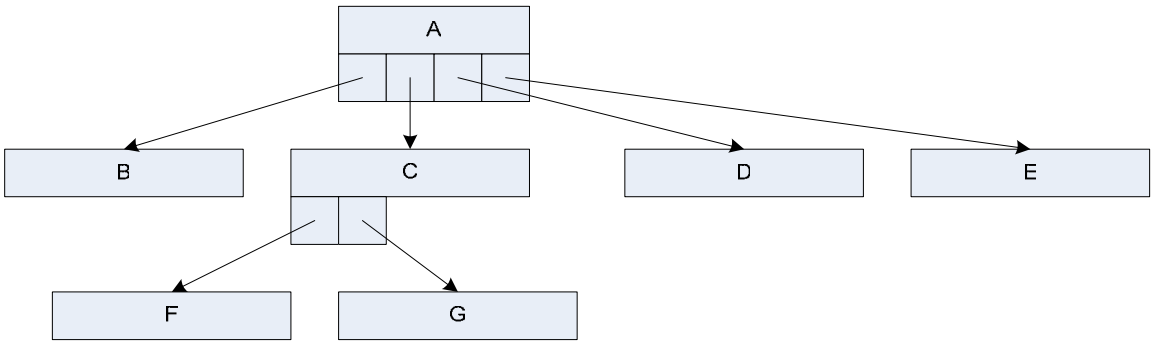
```
// nodul listei simplu inlantuite
struct NodLista
{
	// informatia utila
	TipArbore Informatii;

	// legastura catre elementul urmator
	NodLista *Legatura;

	// constructorul pentru initializarea unui nod
	NodLista(TipArbore info, NodLista* leg = NULL)
		: Informatii(info), Legatura(leg) {}
};

// functie de concatenare a doua liste simplu inlantuite
NodLista* Concatenare(NodLista *cap1, NodLista *cap2)
{
	// cazul 1: prima lista e vida
	if (cap1 == NULL)
		return cap2;

	// cazul 2: prima lista e nevida
	// parcurgem prima lista
	while (cap1->Legatura != NULL)
		cap1 = cap1->Legatura;
	// si facem legatura
	cap1->Legatura = cap2;

	// intoarcem capul listei
	return cap1;
}

// procedura recursiva de parcurgere a unui arbore binar
NodLista* Parcurgere(NodArbore *nod)
{
	// conditia de oprire din recursie
	if (nod == NULL)
		return NULL;

	// initializam lista
	NodLista *cap = NULL;

	// adaugam subarborele stang
	cap = Concatenare(cap, Parcurgere(nod->Stanga));

	// adaugam nodul curent
	cap = Concatenare(cap, new NodLista(nod->Informatii));

	// adaugam subarborele drept
	cap = Concatenare(cap, Parcurgere(nod->Dreapta));

	return cap;
}
```

Arborii oarecare pot fi memorați ca arbori binari schimbând semantica legăturilor nodului astfel:

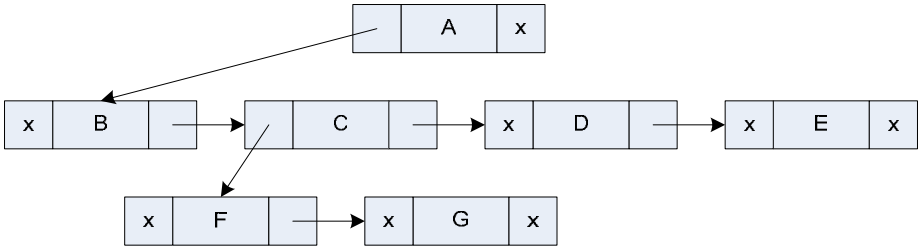
- legătura stânga va adresa primul fiu
- legătura dreapta va adresa următorul frate

Exemplu de transformare:

a) arbore oarecare:



b) arbore oarecare memorat ca arbore binar:



3. Arbori binari de căutare

Arborii binari de căutare sunt arbori binari în care nodurile sunt memorate ordonat în funcție de o cheie. Toate nodurile din arbore au în subarborele stâng noduri care au chei mai mici şi în subarborele drept chei mai mari.

Arborii de căutare permit regăsirea rapidă a informațiilor ($O(log_2 n)$) atât timp cât arborele este echilibrat. În cazul cel mai defavorabil, timpul de căutare este identic cu cel al unei liste simplu înlănțuite.

Operațiile de bază pe un arbore de căutare sunt următoarele:

Operația	**Algoritmul**
Căutare	Se compara cheia cu nodul curent. Dacă este mai egală, am găsit nodul, dacă este mai mică căutăm în subarborele stâng, altfel căutăm în subarborele drept. Căutarea se opreşte când nodul a fost găsit sau s-a atins baza arborelui.
Adăugare	Se caută folosind algoritmul de căutare poziția în arbore şi se alocă memoria şi se face legătura cu nodul părinte.
Ştergere	Se caută nodul de şters şi se şterge nodul. Subarborele drept este avansat în locul nodului şters, iar subarborele stâng este mutat ca fiu al celui mai mic element din subarborele drept.

Implementarea operațiilor de bază este prezentată în următoarea bibliotecă:

```
#ifndef ARBORE_H
#define ARBORE_H

// un nod din arbore
struct NodArbore
{
	// informatia utila
	TipArbore Date;

	// legaturile catre subarbori
	NodArbore *Stanga, *Dreapta;

	// constructor pentru initializarea unui nod nou
	NodArbore(TipArbore date,
		NodArbore *stanga = NULL, NodArbore *dreapta = NULL) :
		Date(date), Stanga(stanga), Dreapta(dreapta){}
};

// Arborele este manipulat sub
// forma unui pointer catre radacina
typedef NodArbore* Arbore;

// Creaza un arbore vid
Arbore ArbCreare()
{
	return NULL;
}

// Testeaza daca un arbore este vid
bool ArbEGol(Arbore& arbore)
{
	return arbore == NULL;
}

// Adauga un element intr-un arbore de cautare
void ArbAdauga(Arbore& arbore, TipArbore date)
{
	// Cazul 1: arbore vid
	if (ArbEGol(arbore))
	{
		arbore = new NodArbore(date);
		return;
	}

	// Cazul 2: arbore nevid
	if (date < arbore->Date)
		// daca exista subarborele stang
		if (arbore->Stanga != NULL)
			// inseram in subarbore
			ArbAdauga(arbore->Stanga, date);
		else
			// cream subarborele stang
			arbore->Stanga = new NodArbore(date);

	if (date > arbore->Date)
		// daca exista subarborele drept
		if (arbore->Dreapta != NULL)
			// inseram in subarbore
			ArbAdauga(arbore->Dreapta, date);
		else
			// cream subarborele drept
			arbore->Dreapta = new NodArbore(date);
}

// Functie privata de stergere a unui nod
void __ArbStergeNod(Arbore& legParinte)
{
	// salvam un pointer la nodul de sters
	Arbore nod = legParinte;
```

```
        // daca avem un subarbore drept
        if (nod->Dreapta != NULL)
        {
                // facem legatura
                legParinte = nod->Dreapta;

                // daca avem si un subarbore stang
                if (nod->Stanga)
                {
                        // cautam cel mai mic element din subarborele drept
                        Arbore temp = nod->Dreapta;
                        while (temp->Stanga != NULL)
                                temp = temp->Stanga;

                        // si adaugam subarborele stang
                        temp->Stanga = nod->Stanga;
                }
        }
        else
                // daca avem doar un subarbore stang
                if (nod->Stanga != NULL)
                        // facem legatura la acesta
                        legParinte = nod->Stanga;
                else
                        // daca nu avem nici un subnod
                        legParinte = NULL;

        // stergem nodul
        delete nod;
}


// Sterge un nod dintr-un arbore de cautare
void ArbSterge(Arbore& arbore, TipArbore date)
{
        // Cazul 1: arbore vid
        if (ArbEGol(arbore))
                return;

        // Cazul 2: stergere radacina
        if (arbore->Date == date)
        {
                // salvam un pointer la radacina
                Arbore nod = arbore;

                // daca avem un subarbore drept
                if (nod->Dreapta)
                {
                        // facem legatura
                        arbore = nod->Dreapta;

                        // daca avem si un subarbore stang
                        if (nod->Stanga)
                        {
                                // cautam cel mai mic element din subarborele drept
                                Arbore temp = nod->Dreapta;
                                while (temp->Stanga != NULL)
                                        temp = temp->Stanga;

                                // si adaugam subarborele stang
                                temp->Stanga = nod->Stanga;
                        }
                }
                else
                        // daca avem doar un subarbore stang
                        if (nod->Stanga != NULL)
                                // facem legatura la acesta
                                arbore = nod->Stanga;
                        else
                                // daca nu avem nici un subnod
```

```
                        arbore = NULL;

                // stergem vechea radacina
                delete nod;

                return;
        }

        // Cazul 3: stergere nod in arbore nevid

        // cautam legatura la nod in arbore
        // si stergem nodul (daca exista)
        Arbore nodCurent = arbore;
        while (true)
        {
                if (date < nodCurent->Date)
                        if (nodCurent->Stanga == NULL)
                                break;  // nodul nu exista
                        else
                                if (nodCurent->Stanga->Date == date)
                                        // nodul de sters este descendentul stang
                                        __ArbStergeNod(nodCurent->Stanga);
                                else
                                        // continuam cautarea in subarborele stang
                     nodCurent = nodCurent->Stanga;
                else
                        if (nodCurent->Dreapta == NULL)
                                break;  // nodul nu exista
                        else
                                if (nodCurent->Dreapta->Date == date)
                                        // nodul de sters este descendentul drept
                                        __ArbStergeNod(nodCurent->Dreapta);
                                else
                                        // continuam cautarea in subarborele stang
                     nodCurent = nodCurent->Dreapta;
        }
}

// Cauta recursiv un nod in arborele de cautare
bool Cautare(Arbore& arbore, TipArbore info)
{
        // conditia de oprire din recursie
        if (arbore == NULL)
                return false;

        // verificam daca am gasit nodul
        if (arbore->Date == info)
                return true;

        // daca cheia este mai mica
        if (arbore->Date < info)
                // cautam in subarborele stang
                return Cautare(arbore->Stanga, info);
        else
                // altfel cautam in subarborele drept
                return Cautare(arbore->Dreapta, info);
}

#endif //ARBORE_H
```

Parcurgerea unui arbore de căutare în ordinea stânga – rădăcină – dreapta conduce la obținerea listei nodurilor în ordinea crescătoare a cheilor. Funcția următoare afișează în ordine elementele unui arbore binar de căutare:

```
void AfisareSRD(Arbore& arbore)
{
        if (ArbEGol(arbore))
```

```
                return;

        AfisareSRD(arbore->Stanga);
        cout << arbore->Date << " ";
        AfisareSRD(arbore->Dreapta);
}
```

Parcurgerea nerecursivă a unui arbore binar de căutare se poate face folosind o stivă:

```
void TraversareNerecursiv(Arbore& arbore)
{
        Stiva stiva = StCreare();

        // a) ne deplasam pana la primul nod
        Arbore nod = arbore;
        while (nod != NULL)
        {
                StAdauga(stiva, nod);
                nod = nod->Stanga;
        }
        if (!StEGoala(stiva))
                cout << StVarf(stiva)->Date << " ";

        // b) traversam arborele in inordine
        Arbore parinte, copil;
        while (!StEGoala(stiva))
        {
                parinte = StExtrage(stiva);
                copil = parinte->Dreapta;

                while (copil != NULL)
                {
                        StAdauga(stiva, copil);
                        copil = copil->Stanga;
                }

                if (!StEGoala(stiva))
                        cout << StVarf(stiva)->Date << " ";
        }
}
```

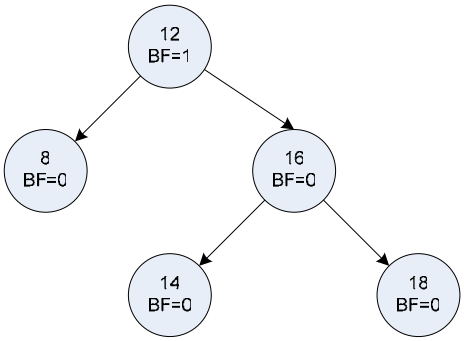
4. Alte tipuri de arbori

Arbori AVL

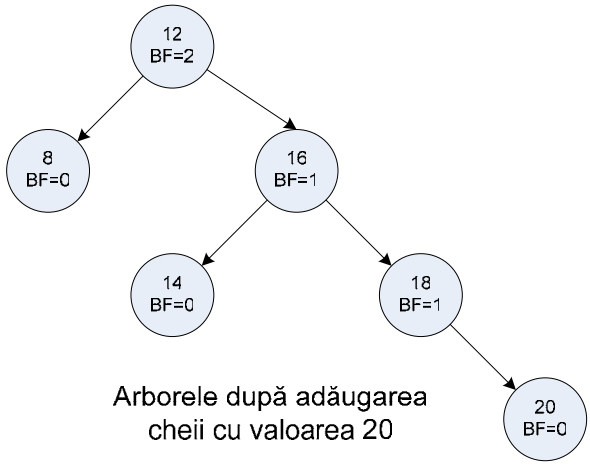
Arborii AVL (Adelson-Veliskii şi Landis) elimină neajunsul major al arborilor binari: faptul că viteza de căutare depinde de ordinea în care sunt introduse cheile în arbore. Arborii AVL permit obținerea unei viteze de căutare constante de complexitate $O(n \log_2 n)$ prin garantarea faptului că arborele este echilibrat la orice moment.

Structura unui nod este cea a unui nod de arbore binar la care se mai adaugă un câmp numit BF (Balance Factor) care reprezintă diferența dintre înălțimea subarborelui drept (RH) şi înălțimea subarborelui stâng (LH). Fiecare nod dintr-un AVL are proprietatea că înălțimea subarborelui stâng diferă de înălțimea subarborelui drept cu cel mult o unitate, deci BF va avea una din valorile -1, 0 sau 1.

Adăugarea şi ştergerea nodurilor se face la fel ca în cazul arborilor binari de căutare. După adăugarea/ştergerea unui nod, se recalculează BF-ul pentru nodurile arborelui. Exemplu:



Arborele inițial

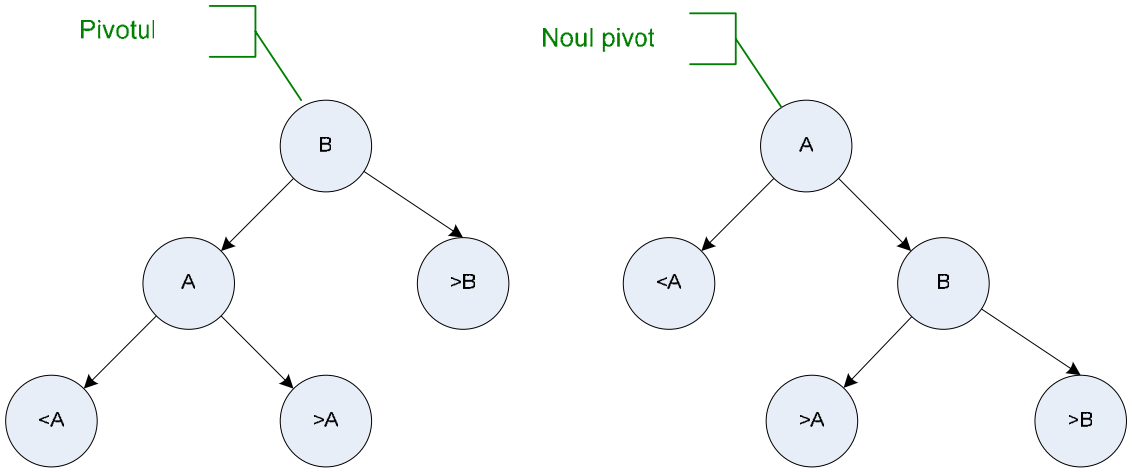


Arborele după adăugarea cheii cu valoarea 20

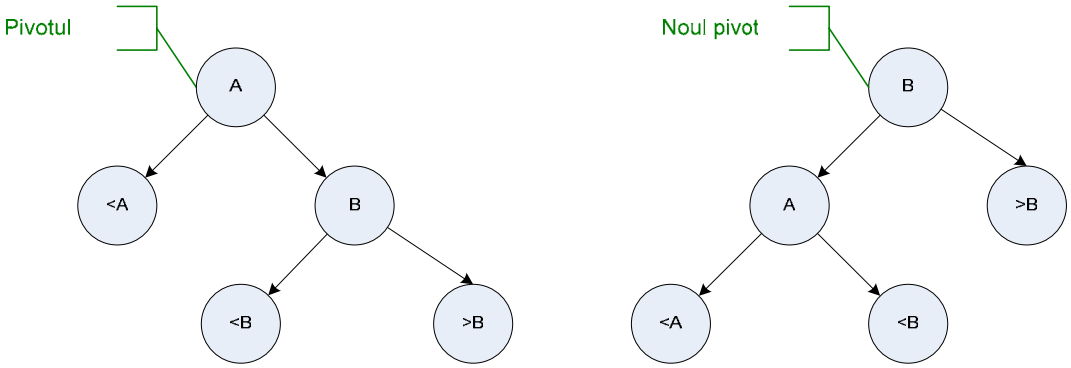
Dacă în urma unei operații de adăugare sau ştergere arborele nu mai este echilibrat (BF $\notin$ {-1,0,1}), acesta trebuie echilibrat. Echilibrarea în cazul arborilor AVL se face prin intermediul operației de rotire la stânga (BF>1) sau la dreapta (BF<1). Pivotul în jurul căruia se face rotirea este cel mai de jos nod care are BF $\notin$ {-1,0,1}. Procedeul de rotire continuă până în momentul în care arborele redevine echilibrat.

Rotirea se face după modelul următor:

1. rotire la dreapta



2. rotire la stânga



Căutarea în arborii AVL se face la fel ca în arborii binari de căutare.

Arbori B

Arborii B (de la Balanced) sunt arbori de căutare **echilibrați** proiectați pentru lucrul cu **volume foarte mari de date** (stocate pe suporturi de memorie externă).

Proprietățile definitorii ale arborilor B sunt:

1. Toate **nodurile** au următoarele câmpuri:
   a. n – numărul de chei stocate în nod
   b. $k_1,\ldots,k_n$ – cheile stocate în nod cu proprietatea $k_1<k_2<\ldots<k_n$
   c. $c_1,\ldots,c_{n+1}$ – pointeri la subarbori
2. Toate cheile din subarborele indicat de c_i sunt cuprinse între $k_{i-1}<k_i$; cheile din subarborele indicat de c_1 sunt mai mici decât k_1, iar cele din subarborele indicat de c_{n+1} sunt mai mari decât k_n
3. Toate nodurile frunză se află la acelaşi nivel h
4. Fiecare arbore B are asociat un grad $t>2$. Toate nodurile, cu excepția rădăcinii trebuie să aibă între $t-1$ şi $2t-1$ noduri

Cele două **avantaje** majore ale arborilor B care îi recomandă pentru folosirea în situațiile în care este necesară prelucrarea unui volum mare de date sunt:

- permite citirea mai multor chei la un singur acces la disc (gradul t este ales astfel încât dimensiunea unui nod corespunde dimensiunii unei pagini de disc)
- necesită accesarea a foarte puține pagini pentru a efectua o căutare ($O(\log_t n)$)

Principalele **operații** care se efectuează pe un astfel de arbore sunt căutarea, adăugarea de chei şi ştergerea de chei.

Căutarea se face similar cu căutarea într-un arbore binar după următorul algoritm:

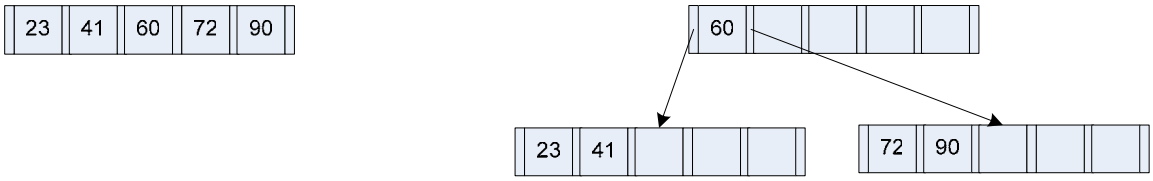
```
i = 1
while i <= nod.n and cheie > nod.k[i]  // căutam cheia în nodul curent
      i = i + 1
if i <= nod.n and cheie = nod.k[i]     // verificăm dacă am găsit nodul
      return (nod, i)
if nod.c[i] != nul                     // dacă nu este nod frunză
      return cautare(nod.c[i], cheie)  // continuăm căutarea
else                                   // altfel înseamnă că avem un nod
      return nul                       // frunză şi oprim căutarea
```

Adăugarea unei chei se face recursiv printr-o singură parcurgere în următorii paşi:

1. Dacă nodul rădăcină este plin (are $2t-1$ chei), atunci se descompune.

2. Se porneşte procedura recursivă care parcurge arborele ca la căutare şi execută următoarele acțiuni pentru fiecare nod:
    a. Dacă nodul este nod frunză se inserează cheia.
    b. Dace nu este nod frunză:
        i. Dacă nodul copil este plin se descompune.
        ii. Se apelează procedura pentru nodul copil.

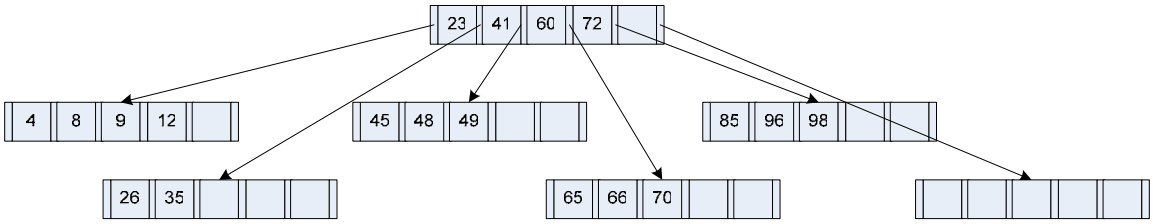
Operația de **descompunere** a unui nod cu *2t-1* chei presupune găsirea elementului median al nodului, mutarea acestuia în nodul părinte sau crearea unui nod nou în cazul rădăcinii şi descompunerea nodului inițial în două noduri cu *t-1* chei. Exemplu de descompunere:



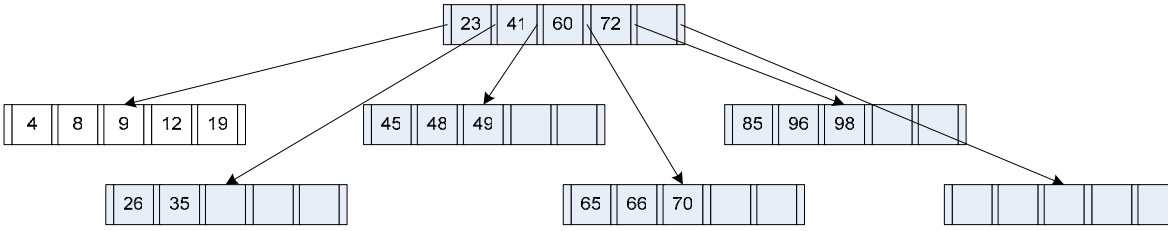
a) nodul inițial b) nodul descompus

Se observă că toate inserările se fac într-un nod frunză, iar arborele creşte în sus, de la rădăcină, prin intermediul operației de descompunere.

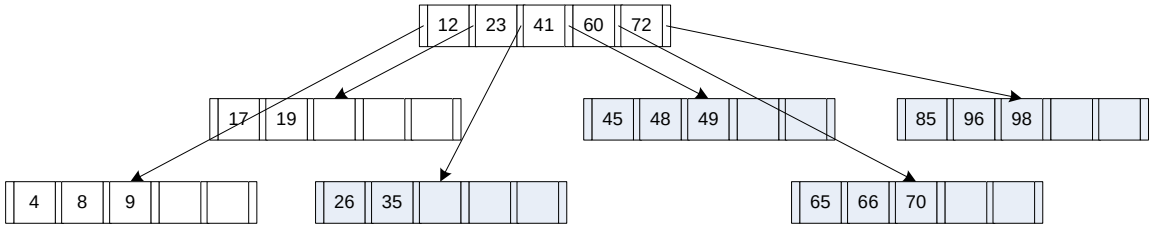
Pentru exemplificare vom considera următorul arbore B de grad *t=2* (fiecare nod cu excepția rădăcinii va avea între 2 şi 5 chei) cu două nivele:



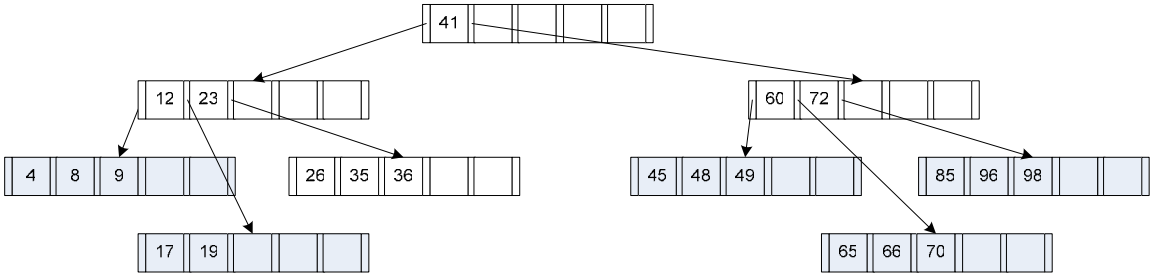
a) arborele inițial



b) arborele după inserarea elementului 19



c) arborele după inserarea elementului 12 (descompunere nod intern)



d) arborele după inserarea elementului 36 (descompunere nod rădăcină)

Ştergerea unei chei se face similar cu adăugarea. Păstrarea proprietăţilor arborelui B în urma ştergerii unei chei se face prin două mecanisme:

- coborârea unei chei din nodul părinte/fiu în cazul în care acesta are cel puţin *t* chei sau este nodul rădăcină
- recompunerea nodului rădăcină în situaţia în care nodul rădăcină are 1 cheie şi nodurile copil au câte *t-1* chei (astfel se realizează scăderea înălţimii arborelui)

5. Probleme

1. Scrieţi funcţia pentru numărarea elementelor dintr-un arbore oarecare.
2. Scrieţi funcţia pentru transformarea unui arbore oarecare într-o listă simplu înlănţuită prin parcurgerea acestuia.
3. Scrieţi funcţiile pentru determinarea elementului minim şi elementului maxim dintr-un arbore binar de căutare.
4. Scrieţi funcţia pentru afişarea în ordine a elementelor dintr-un arbore binar de căutare.
5. Scrieţi o funcţie iterativă pentru căutarea unui element într-un arbore de căutare.
6. Scrieţi funcţia de concatenare a doi arbori binari de căutare (funcţia de adăugare în arbore se presupune creată în prealabil).
7. Scrieţi funcţia pentru determinarea celui mai apropiat părinte comun a două noduri dintr-un arbore binar.
8. Precizaţi cum va arăta un arbore AVL după introducerea cheilor 12, 8, 5, 77, 12, 88, 92, 93, 94, 95, 7, 8, 9.

9. Precizați cum va arăta un arbore B de grad 3 după introducerea cheilor 12, 8, 5, 77, 12, 88, 92, 93, 94, 95, 7, 8, 9.
10. O societate de investiții deține o bază de aproximativ 8 000 000 clienți. Precizați ce structură de date trebuie folosită pentru a permite o regăsire rapidă a clienților pe baza codului numeric personal şi argumentați alegerea.