Preluat și adaptat din: *Felix FURTUNA - Grafica interactiva cu aplicații in JAVA si JAVA 3D, Editura ASE, București, 2007, 171pg ISBN 978-973-594-970-9*

Capitolul II. Transformări geometrice

2.1 Transformări geometrice plane

2.1.1 Transformarea de vizualizare

Reprezentarea grafică a obiectelor din lumea înconjurătoare presupune cunoașterea unor informații despre acestea. În general, aceste informații se regăsesc sub forma coordonatelor punctelor din care se compun imaginile grafice.

Coordonatele utilizator sau *coordonatele reale* sunt acele coordonate care identifică obiectul în mediul său, în lumea înconjurătoare. Acest spațiu este cunoscut sub numele de *spațiul utilizator*. Teoretic spațiul utilizator se întinde la infinit, dar practic, sub aspectul reprezentărilor grafice computerizate, el este limitat de cel mai mare număr real care poate fi memorat de calculator. Se consideră spațiul utilizator vizibil acea porțiune rectangulară din spațiu, al cărei conținut se reprezintă grafic și care se numește *fereastră* .

Cei patru parametri care definesc fereastra îi vom nota cu, *wl*, *wt*, *wr*, *wb,* și reprezintă coordonatele colțului stânga-sus (*wl,wt*), *window left-top*, și dreapta-jos (*wr,wb*) *window right-bottom*. Coordonatele utilizator aparțin lumii reale, pot avea mărimi foarte variate, au de obicei semnificații fizice (kilometri, secunde, unități monetare etc.) și nu sunt legate în vreun fel de prezentarea grafică. Percepția umană este tridimensională, însă reprezentarea grafică este una plană, astfel încât coordonatele reale sunt cele date de proiecția pe un suport grafic bidimensional.

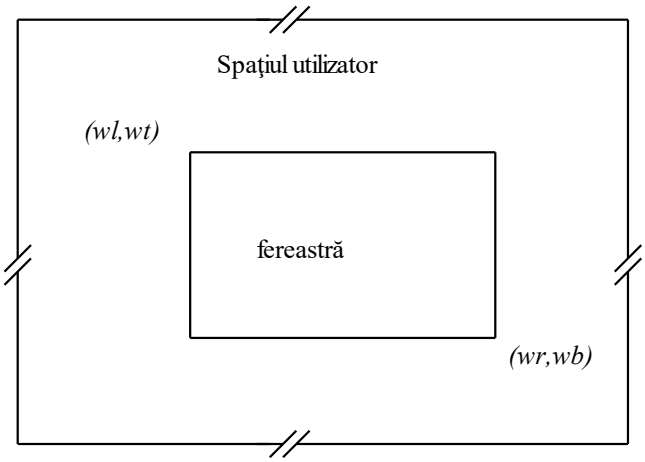

Figura 2.1 Spațiul utilizator

Coordonatele diferitelor puncte din interiorul ferestrei sunt cuprinse între *wl* și *wr,* respectiv *wt* și *wb*.

Reprezentarea conținutului unei ferestre pe ecranul calculatorului nu implică neapărat utilizarea întregului ecran. Utilizarea întregului ecran este aproape imposibilă dacă se dorește o reprezentare fără deformări. Trebuie deci specificată o zonă rectangulară de pe ecran în care se vizualizează fereastra. Această zonă rectangulară se numește *vizor* (*viewport*) și va fi definită prin parametrii *vl*, *vt*, *vr*, *vb* (Figura 2.2). Fiecărui punct aparținând obiectului de reprezentat îi va corespunde în vizor un punct ecran identificat prin *coordonate ecran*. Coordonatele ecran sunt de

obicei raportate la colțul stânga-sus al ecranului, dar aceasta nu este o regulă, pot fi alese alte puncte de referință în funcție de instrumentele grafice utilizate.

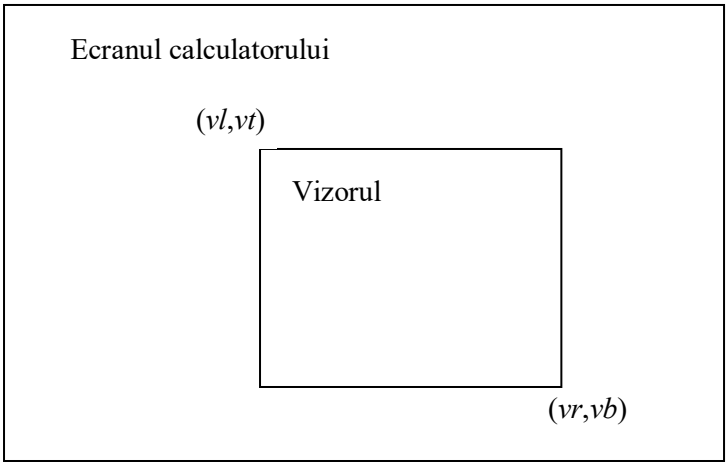

Figura 2.2 Spațiul ecran

Vizorul este deci porțiunea din suportul grafic unde va fi proiectată fereastra. Valoarile maximă pentru parametrii *vl*,*vr*,*vt*,*vb* depind de caracteristicile dispozitivului grafic.

Coordonatele ferestrei se determină în raport de coordonatele punctelor din care este alcătuit obiectul de reprezentat. Să presupunem că un obiect este alcătuit din *n* puncte, de coordonate (x_i, y_i), i =1, n. Pentru a reprezenta grafic în întregime obiectul, coordonatele ferestrei sunt alese astfel încât:

$$wl \le \underset{i}{Minim}\, x_i,\ wr \ge \underset{i}{Maxim}\, x_i,\ wb \le \underset{i}{Minim}\, y_i,\ wt \ge \underset{i}{Maxim}\, y_i.$$

Coordonatele vizorului vor fi în așa fel alese încât reprezentarea grafică să se facă fără deformări. Pentru aceasta trebuie respectată relația:

$$\frac{wt - wb}{wr - wl} = \frac{vt - vb}{vr - vl}.$$

Dacă $\frac{wt - wb}{wr - wl} \ne \frac{vt - vb}{vr - vl}$ imaginea obiectului va suferi deformări fie într-un sens, fie în celălalt.

Pentru a obține reprezentarea unei ferestre (*wl*, *wt*, *wr*, *wb*) într-un vizor (*vl*, *vt*, *vr*, *vb*) trebuie determinate relațiile de legătură dintre coordonatele reale și cele ecran. Acestea sunt determinate respectând regula conservării proporțiilor. Unui punct de coordonate reale (*x*,*y*) îi va corespunde unul de coordonate ecran (*xe*, *ye*), astfel încât distanțele față de marginile ferestrei, respectiv vizorului să aibă aceleași proporții [2,6] (Figura 2.3).

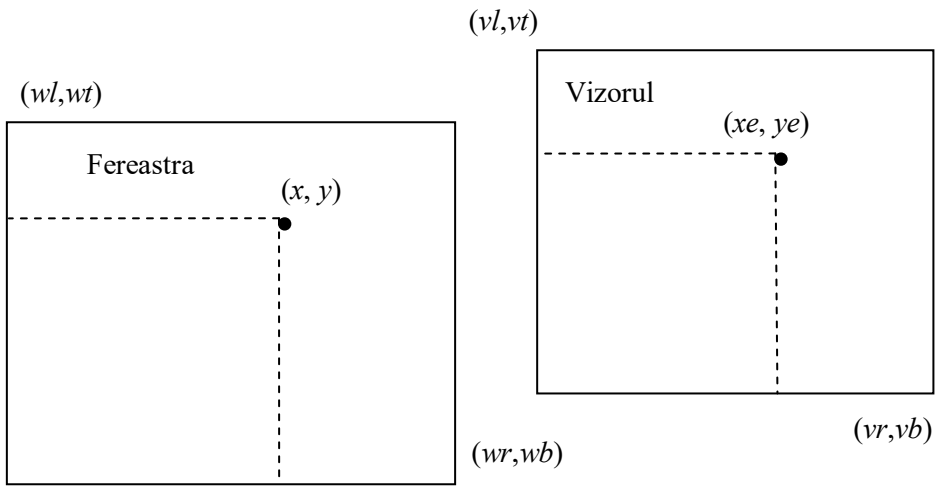

Figura 2.3 Transformarea de vizualizare

Relațiile sunt următoare:

$$\frac{x-wl}{wr-wl}=\frac{xe-vl}{vr-vl},\ \frac{y-wb}{wt-wb}=\frac{ye-vb}{vt-vb}.$$

Prelucrând aceste relații, obținem pentru coordonatele ecran relațiile:

$$\begin{cases} xe = x\cdot ax + bx \\ ye = y\cdot ay + by \end{cases},$$

unde,

$$ax=\frac{vr-vl}{wr-wl},\ bx=\frac{vl(wr-wl)-wl(vr-vl)}{wr-wl},$$
$$ay=\frac{vt-vb}{wt-wb},\ by=\frac{vb(wt-wb)-wb(vt-vb)}{wt-wb}.$$

2.1.2 Transformări elementare

Dacă x și y sunt coordonatele unui punct M, ecuațiile $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ permit trecerea de la punctul $M(x, y)$ la punctul $M'(x', y')$. Aceste ecuații definesc o transformare plană. Punctul M' este transformatul lui M.

Putem considera coordonatele punctului ca o matrice 1×2. Fie produsul matriceal următor pe care îl notăm cu $(x'\ \ y')$:

$$(x'\ \ y') = (x\ \ y)\begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = (Ax + Cy \quad Bx + Dy).$$

Toate punctele planului xOy înmulțite cu o matrice 2×2 vor da noi puncte (x', y') conform acestor relații. Există tipuri de transformări care nu pot fi reprezentate printr-o matrice 2×2. De exemplu, translația care este reprezentată de ecuațiile $x' = x + a$ și $y' = y + b$, nu poate fi efectuată printr-o matrice 2×2. Pentru rezolvarea situației se va introduce o a treia componentă a vectorilor $(x\ y)$ și $(x'\ y')$, obținând $(x\ y\ 1)$, $(x'\ y'\ 1)$. Acestea sunt coordonatele plane omogene (mai multe detalii despre coordonate omogene vor fi date la capitolul 2.2.2.) Matricea transformărilor va fi obligatoriu

de tip 3×3. Un avantaj suplimentar al matricelor 3×3 este că permit obținerea transformărilor inverse, dând familiilor de transformări caracteristica de grup algebric. Transformarea inversă realizează trecerea de la punctul *M'*(*x'*, *y'*) la punctul *M*(*x*, *y*).

Transformările plane elementare sunt următoarele:

a) ***Translația.*** Ecuațiile de transformare sunt $x' = x + a$ și $y' = y + b$. Dacă $a = b = 0$, atunci punctul *M*(*x*, *y*) rămâne neschimbat și obținem transformarea identică. Transformarea inversă este dată de relațiile: $x = x' - a$, $y = y' - b$.

Produsul matriceal care permite obținerea translației este:

$$\begin{Vmatrix} x & y & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x+a & y+b & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x' & y' & 1 \end{Vmatrix}.$$

b) ***Scalarea.*** Este o transformare de tipul:

$$\begin{Vmatrix} x & y & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} ax & by & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x' & y' & 1 \end{Vmatrix}$$

unde matricea 3x3 este matricea de scalare cu parametrii *a* si *b*.

c) ***Simetria.*** Există următoarele tipuri de simetrii:

Simetria în raport cu axa OX: $S^X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Simetria în raport cu axa OY: $S^Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Simetria în raport cu originea O: $S^O = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

d) ***Deformarea.***

Matricea de deformare este $D = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Produsul matriceal corespunzător este:

$$\begin{Vmatrix} x & y & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x+ay & y+bx & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x' & y' & 1 \end{Vmatrix}.$$

e) ***Rotația.*** Este considerată transformare elementară rotația în jurul originii, în sens trigonometric, cu un un unghi oarecare, θ (Figura 2.5). Punctul M se află la o distanță *r* (raza) față de originea sistemului de coordonate și sub un unghi *α* față de axa Ox. Relațiile care permit obținerea noilor coordonate ale punctului M (coordonatele punctului M^t) sunt:

$$x = r \cdot \cos(\alpha)$$

$$x^t = r \cdot \cos(\theta + \alpha) = r(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y = r \cdot \sin(\alpha)$$

$$y^t = r \cdot \sin(\theta + \alpha) = r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Aceste relații dau matricea de rotație, $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, iar produsul matriceal prin care se obțin coordonatele punctului M^t este:

$$(x^t \quad y^t \quad 1) = (x \quad y \quad 1)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

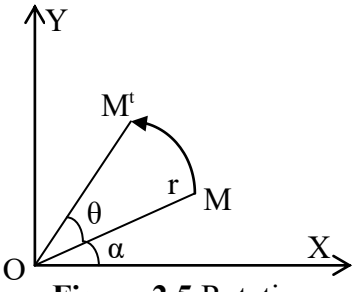

Figura 2.5 Rotaţia

Compunerea transformărilor 2D. O transformare compusă constă într-o succesiune de transformări elementare executate într-o anumită ordine. Matricea de transformare corespunzătoare se obține prin înmulțirea în ordinea stabilită a matricelor transformărilor elementare.

Matricea generală de transformare este: $\begin{Vmatrix} A & B & 1 \\ C & D & 1 \\ a & b & 1 \end{Vmatrix}$. Parametrii A,B,C și D dau scalarea, rotația, deformarea și simetriile, în timp ce parametrii *a* și *b* dau translația.

2.2 Transformări geometrice în spațiu

2.2.1 Sisteme de coordonate 3D

Complexitatea reprezentărilor tridimensionale implică o abordare diferențiată a sistemelor de coordonate 3D. Astfel, din punct de vedere al orientării axelor, sistemele de coordonate 3D pot fi *directe* sau *indirecte*. Sunt mai multe metode de determinare a orientării axelor. O metodă consacrată este *regula mâinii drepte*. Conform acestei reguli, în cazul sistemelor directe, degetul arătător de la mâna dreaptă arată sensul axei O*x*, degetul mare sensul axei O*z*, iar cel mijlociu sensul axei O*y* (Figura 2.7). Sistemele indirecte au axa Ox invers orientată față de sistemele directe.

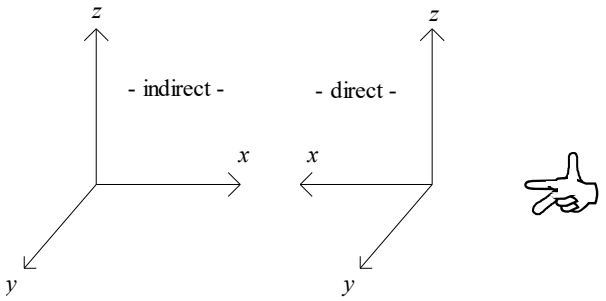

Figura 2.7 Sisteme directe și indirecte

Din punct de vedere al raportării, la obiectul reprezentării sau la observator, sistemele de coordonate 3D sunt de două feluri: *sisteme de coordonate obiect* și *sisteme de coordonate observator*. Sistemul de coordonate obiect este sistemul de coordonate 3D în care se află obiectul de reprezentat. Este sistemul de coordonate propriu obiectului, cu propria origine la care sunt raportate coordonatele punctelor din care este alcătuit obiectul. Sistemul de coordonate obiect este un sistem direct (Figura 2.8). Sistemul de coordonate observator este utilizat pentru a marca poziția observatorului. Originea sa coincide cu poziția observatorului, iar axa Oz are direcția și sensul privirii. Este un sistem de coordonate indirect.

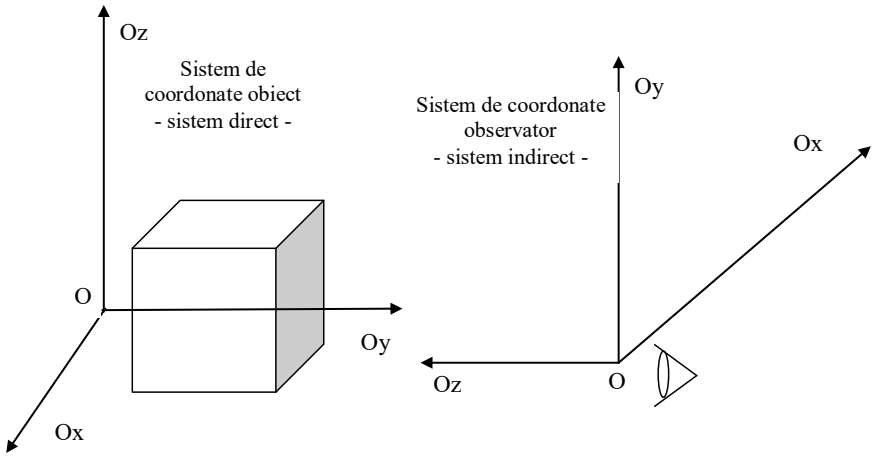

Figura 2.8 Sisteme de coordonate obiect și observator

Pentru localizarea punctelor în spațiu sunt utilizate trei sisteme de coordonate: *carteziene, sferice* și *cilindrice*.

Coordonatele carteziene. Se precizează:

x – proiecția punctului pe axa Ox,

y – proiecția pe Oz,

z – proiecția pe Oy,

cu $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}$.

Coordonatele cilindrice ale unui punct *P* sunt:

cota (*z*) – proiecția punctului P pe axa Oz,

raza (*R*) – distanța de la originea sistemului de coordonate la proiecția punctului P pe planul xOy,

unghiul (θ) – unghiul dintre axa Ox și proiecția lui P pe planul xOy,

cu $z \in \mathbf{R}$, $R \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Coordonate sferice ale unui punct sunt:

raza R – distanța de la origine la punctul P,

unghiul φ (*latitudinea*) – unghiul dintre distanța R și proiecția lui P pe planul xOy,

unghiul θ (*longitudinea*) - unghiul dintre axa Ox și proiecția lui P pe planul xOy,

cu restricțiile: $R \in [0,\infty), \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

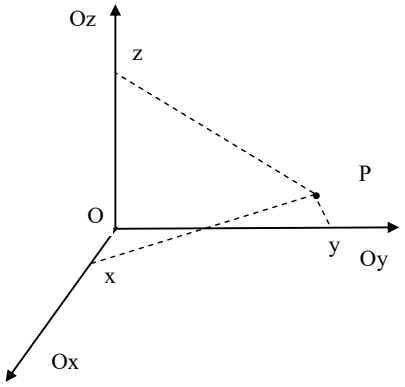

Figura 2.9 a) Coordonate carteziene

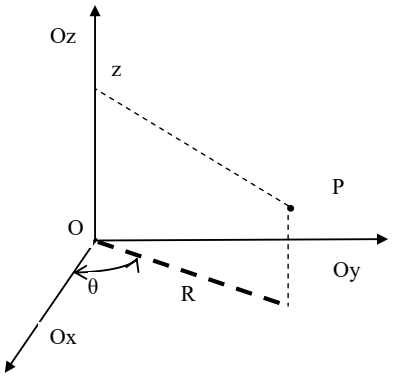

Figura 2.9 b) Coordonate cilindrice

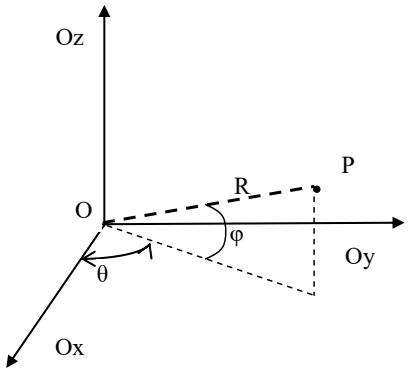

Figura 2.9 c) Coordonate sferice

Trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice se face astfel:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + k\pi & x \neq 0 \end{cases}, \text{ unde } k = \begin{cases} 0 & x > 0, y > 0 \\ 1 & x < 0 \\ 2 & x > 0, y < 0 \end{cases}.$$

$$\varphi = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & x^2 + y^2 = 0, z < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x^2 + y^2 = 0, z = 0 \\ arctg\,\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Relațiile de trecere de la coordonate sferice la coordonate carteziene sunt: $x = R\cos\theta\cos\varphi$; $y = R\sin\theta\cos\varphi$; $z = R\sin\varphi$.

Trecerea din coordonate carteziene în coordonate cilindrice se realizează prin relațiile: $R = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = z$; θ se calculează după aceeași relație ca la coordonatele sferice. Trecerea inversă, de la coordonate cilindrice la carteziene, este dată prin relațiile: $x = R\cos\theta$; $y = R\sin\theta$; $z = z$.

2.2.2 Transformări elementare

Pentru a putea exprima matriceal toate transformările se folosesc coordonatele omogene. Pentru un punct dat M(x y z), vectorul punct are forma normală (x,y,z,1), 1 fiind norma dimensională. Reprezentarea unitară și combinarea transformărilor geometrice spațiale se pot face într-un sistem de coordonate cu patru dimensiuni, numit sistem de coordonate omogene. Un punct P(x y z) se reprezintă în sistem de coordonate omogene prin punctul P(X Y Z w), unde $X=x\cdot w$, $Y=y\cdot w$, $Z=z\cdot w$, pentru orice valoare $w\neq 0$, numită factor de scală. Trecerea la coordonate omogene se efectuează de regulă fără modificarea cotelor x, y, z, luând w=1. Matricele de transformare vor fi de dimensiuni 4x4. Transformările elementare sunt următoarele:

a) ***Translatia.*** Este dată de relația:

$$\begin{Vmatrix} x & y & z & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ A & B & C & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x + A & y + B & z + C & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{Vmatrix}.$$

b) ***Scalarea:***

$$\begin{Vmatrix} x & y & z & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Ax & By & Cz & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{Vmatrix}$$

c) ***Simetriile.*** Sunt simetrii în raport cu axele, cu planele și în raport cu originea. Matricele de simetrie sunt următoarele: în raport cu axa Ox, $S^X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, în raport cu axa Oy, $S^Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, în raport cu axa Oz, $S^Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, în raport cu planul xOy, $S^{XOY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, în raport cu planul xOz, $S^{XOZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, în raport cu planul yOz, $S^{YOZ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, în raport cu originea O, $S^O = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

d) ***Rotațiile.*** Sunt considerate transformări elementare rotațiile cu un unghi oarecare în jurul axelor, în sens trigonometric. Rotația cu un unghi θ, în sens trigonometric în jurul axei Oz este echivalentă cu o rotație 2D cu același unghi în jurul originii în planul xOy, deoarece axa Oz este perpendiculară pe acest plan. Matricea corespunzătoare este: $R_{Oz} = \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Celelalte două matrice (rotația în jurul axelor OX și OY) sunt: $R_{Ox} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, R_{Oy} = \begin{Vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Compunerea transformărilor 3D. Se realizează la fel precum în plan. O transformare compusă constă intr-o succesiune de transformări elementare. Matricea transformării compuse este produsul matricelor transformărilor elementare. Ordinea de înmulțire este dată de ordinea în care se execută transformările elementare corespunzătoare.

Exemplul 2. *Rotație cu un unghi ϑ, în sens trigonometric, în jurul unei axe paralele cu Ox*. Rezultatul compunerii unei serii de transformări se rezumă la o matrice unică. Va fi identificată matricea de rotație sub un unghi θ în jurul dreptei *pq*, paralelă cu O*x*. Dreapta *pq* este definită de punctele *p*(*a, b, c*) și *q*(*d, e, f*). Pentru obținerea transformării compuse sunt parcurși pașii:

1) se efectuează o translație *T*, care aduce punctul *p* în originea sistemului de axe;

2) se efectuează rotația *R* cerută de unghiul θ;

3) se execută translația *T'* opusă primeia, care readuce punctul *p* la poziția sa inițială.

Este obținut produsul matriceal $M = T \cdot R \cdot T'$:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & -b\cos\theta + c\sin\theta + b & -b\sin\theta - c\cos\theta + c & 1 \end{Vmatrix}$$

2.2.3 Imaginea plană a unui obiect 3D

Imaginea unui obiect aflat în spațiu este una plană. Este acea imagine percepută de observator atunci când privește spre obiectul respectiv. Forma imaginii depinde de mărimea obiectului și poziția observatorului. Imaginea plană a unui obiect 3D se obține în trei etape:

- determinarea coordonatelor observator, pornind de la coordonatele obiect și poziția observatorului;
- proiecția pe un plan aflat la o oarecare distanță de observator și obținerea coordonatelor plane reale ale obiectului;
- transformarea de vizualizare și obținerea coordonatelor ecran ale obiectului.

2.2.3.1 Determinarea coordonatelor observator

Imaginea plană a unui obiect 3D se poate obține printr-o transformare compusă , rezultată prin compunerea a patru transformări elementare [2]. Obiectul privit se găsește într-un sistem de coordonate propriu (sistem obiect), un sistem direct, având centrul în O. Observatorul se află în punctul O', are propriul sistem de coordonate (sistem observator), un sistem indirect cu originea în O', și axa O'z orientată în sensul privirii observatorului , adică spre sistemul de coordonate obiect în care se află obiectul privit. În sistemul de coordonate obiect punctul O' are coordonatele carteziene (*M*,*N*,*P*). Lui i se pot asocia coordonatele sferice (R,θ,φ) (Figura 3.6).

Cele patru etape prin care se poate obține imaginea plană a unui obiect 3D corespund la cele patru transformări fundamentale pe care trebuie să le suporte sistemul de coordonate obiect pentru a se suprapune sistemului de coordonate observator. Fiecare din cele patru etape transformă parțial sistemul (Ox,Oy,Oz) în sistemul (O'x,O'y,O'z). Matricele de transformare elementare vor fi utilizate în forma lor inversă deoarece corespund unor transformări elementare aplicate sistemului de coordonate și nu obiectelor din cadrul sistemului.

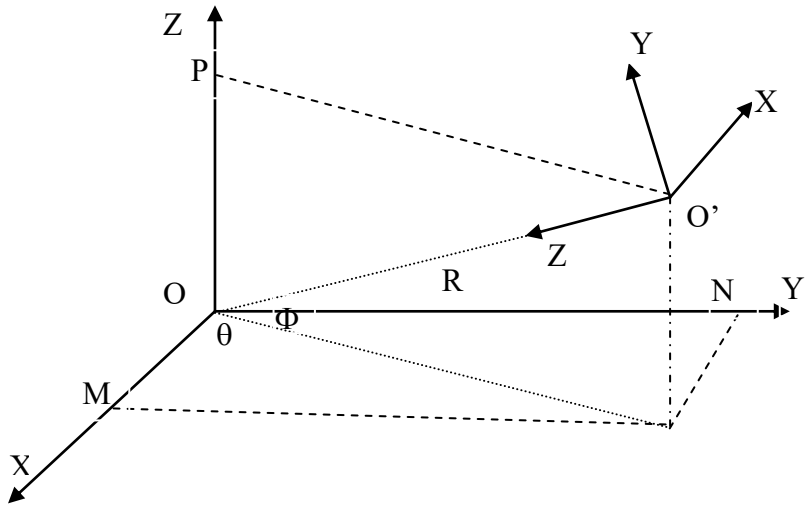

Figura 2.10 Determinarea coordonatelor observator

Etapa 1. Translația sistemului (Ox,Oy,Oz) de la originea O la originea O' a sistemului (O'x,O'y,O'z). Matricea de transformare aplicată este:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -M & -N & -P & 1 \end{bmatrix}$, care datorită relațiilor dintre coordonatele carteziene și coordonatele sferice ale punctului O' devine

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\cos\varphi & -R\sin\varphi & 1 \end{bmatrix}.$$

În urma transformării rezultă sistemul de coordonate intermediar (Ox1,Oy1,Oz1):

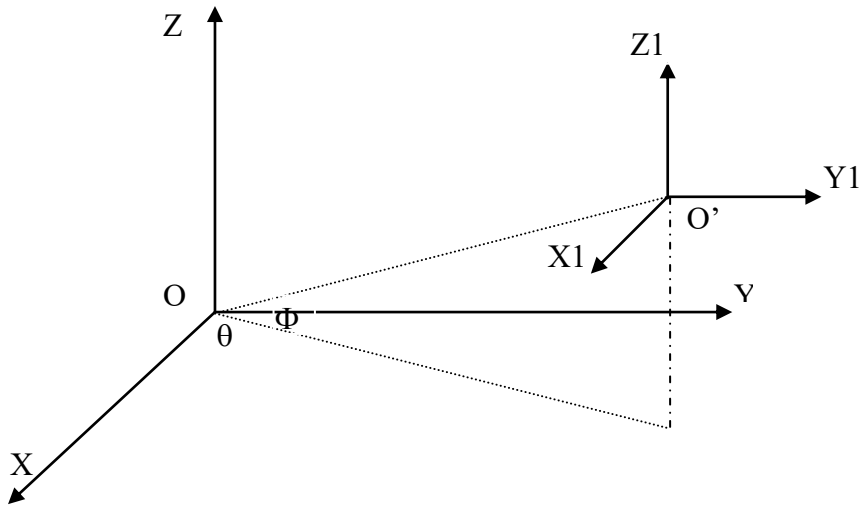

Figura 2.11 Determinarea coordonatelor observator. Etapa 1

Etapa 2. Rotația sistemului de coordonate (Ox1,Oy1,Oz1) cu un unghi -(90-θ) în jurul axei Z1.

Inversa matricei de rotație cu un unghi oarecare α în jurul axei Oz este $R_Z^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Unghiul α în acest caz este 90-θ iar matricea de transformare aplicată este B = $\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, deoarece cos(θ-90) = sinθ, iar sin(θ-90) = -cosθ.

În urma rotației rezultă sistemul de coordonate intermediar (Ox2,Oy2,Oz2):

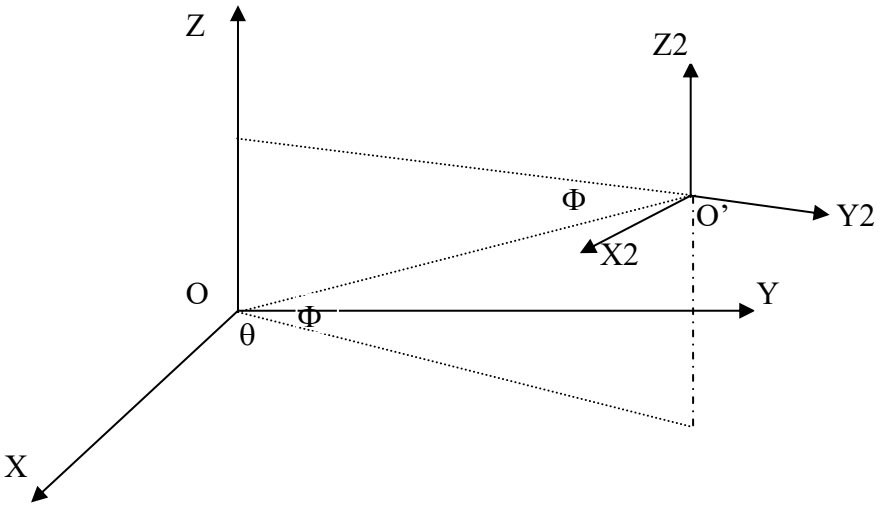

Figura 2.12 Determinarea coordonatelor observator. Etapa 2

Etapa 3. Rotația sistemului (Ox2,Oy2,Oz2) cu un unghi 90+φ în jurul axei Ox2.

Inversa matricei generale de rotație cu un unghi α în jurul axei OX este $R_X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. În cazul de față α = 90+φ. Ținând cont de relațiile cos(90+φ) = -sinφ și sin(90+φ) = cosφ, rezultă matricea de transformare C = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. În urma transformării rezultă sistemul de coordonate intermediar (Ox3,Oy3,Oz3):

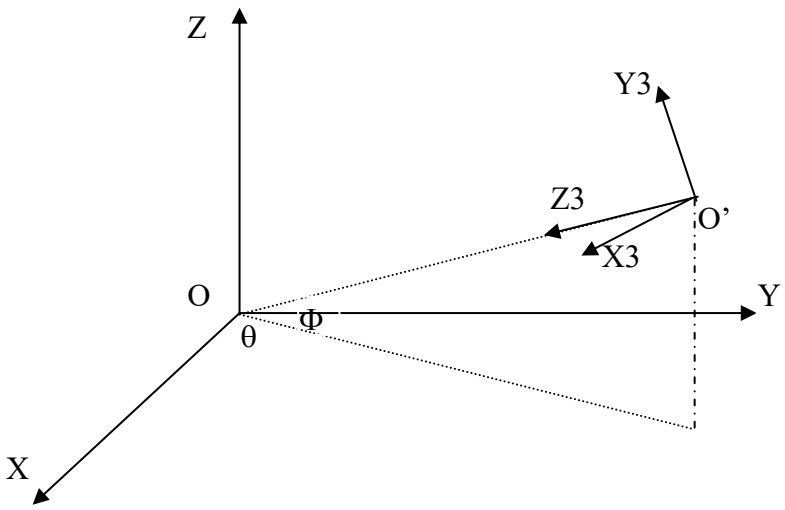

Figura 2.13 Determinarea coordonatelor observator. Etapa 3

Etapa 4. Conversia sistemului de coordonate (Ox3,Oy3,Oz3), dintr-un sistem indirect într-un sistem direct.

Matricea de transformare aplicată este: D = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, o matrice de simetrie, deoarece se schimbă doar sensul axei Ox3. În urma acestei ultime transformări rezultă sistemul de coordonate (Ox4,Oy4,Oz4), care este echivalent cu sistemul de coordonate observator (O'x,O'y,O'z).

Matricea compusă , T , este determinată astfel:

T = A×B×C×D = $\begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta\sin\varphi & -\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & R & 1 \end{bmatrix}$.

Aplicând fiecărui punct al unui obiect aflat în sistemul de coordonate propriu această transformare, vom obține coordonatele sale observator. Astfel, dacă un punct oarecare din componența obiectului are coordonatele reale omogene (x,y,z,1), coordonatele sale în sistemul observator sunt:

(xo,yo,zo,1) = (x,y,z,1)·T,

adică $\begin{cases} xo = & -x\sin\theta + y\cos\varphi \\ yo = & -x\cos\theta\sin\varphi - y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\varphi \\ zo = & -x\cos\theta\cos\varphi - y\sin\theta\cos\varphi - z\sin\varphi + R \end{cases}$.

2.2.3.2 Proiecția plană a unui obiect 3D

În general, prin proiecție se înțelege ansamblul de transformări pe care le suferă un punct aflat într-un sistem *n*-dimensional pentru a trece într-un sistem de dimensiuni mai mici. Proiecțiile pe un plan în grafica 3D sunt cunoscute sub numele de proiecții geometrice plane. Acestea se împart în două mari clase:

1. ***Proiecțiile perspectivă***. În acest tip de proiecții, centrul de proiecție se află la o distanță finită de planul de proiecție.

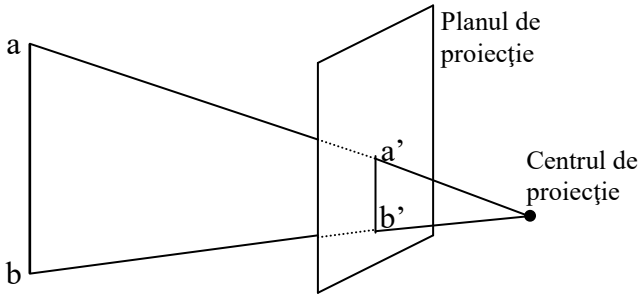

Figura 2.14 Proiecția perspectivă

Proiecția perspectivă crează un efect vizual asemănător celui perceput de sistemul vizual uman. Mărimea obiectului proiectat este invers proporțională cu distanța ce separă obiectul de centrul de proiecție. Distanțele și unghiurile schimbă așadar proiecția, mai puțin pentru acele suprafețe ale obiectului proiectat care sunt paralele cu planul de proiecție. În funcție de existența suprafețelor paralele cu planul de proiecție sunt tratate distinct trei tipuri de proiecție perspectivă:

- când cel puțin una din suprafețele obiectului proiectat este paralelă cu planul de proiecție;

- când cel puțin una din muchiile obiectului proiectat este paralelă cu planul de proiecție, fără ca vreo suprafață să fie paralelă cu acesta;

- când nu există muchii paralele cu planul de proiecție.

2. ***Proiecții paralele***. În acest tip de proiecții, centrul de proiecție este situat la o distanță infinită de obiect.

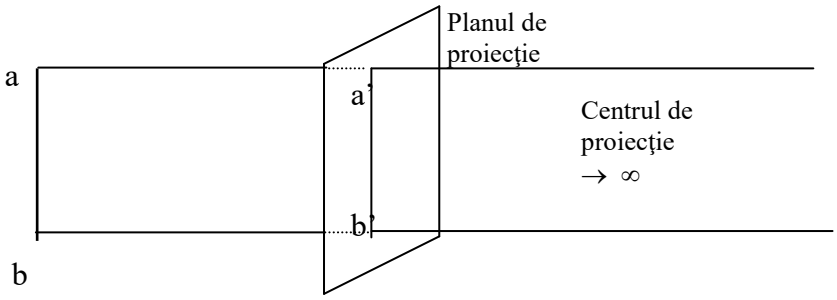

Figura 2.15 Proiecția paralelă

Proiecția paralelă conservă mărimea obiectului proiectat. Pentru a putea proiecta imaginea unui obiect pe un plan, este necesar să asociem coordonatelor reale ale fiecărui punct din care este alcătuit obiectul, coordonatele ecran.

Se consideră că:

- ecranul este un plan perpendicular pe dreapta ce unește ochiul cu originea sistemului de coordonate în care se află obiectul;

- ecranul este situat la o distanță *D* de ochiul observatorului;

- sistemul de coordonate al observatorului are originea plasată în punctul în care se află ochiul, iara axa Z este orientată către originea sistemului de coordonate în care se află obiectul, fiind un sistem indirect dreapta.

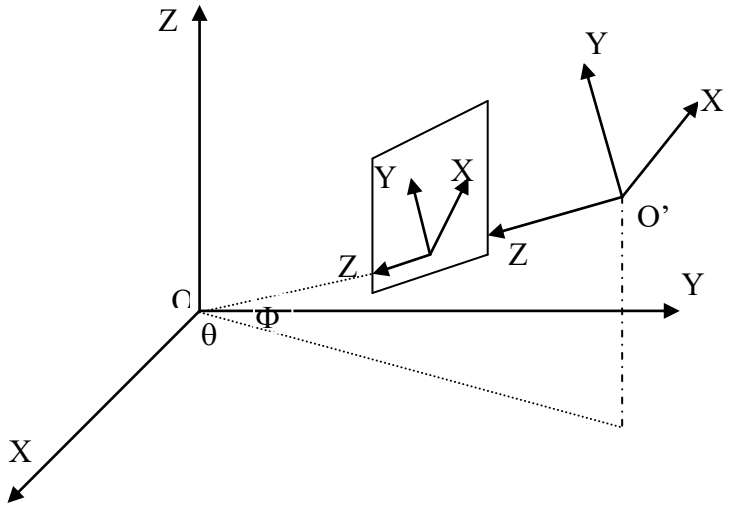

Figura 2.16 Planul de proiecție

Se notează cu *R* distanța de la observator la originea sistemului de coordonate obiect. Dacă *R* crește, imaginea pe ecran a obiectului vizualizat, scade și invers. Imaginea se construiește proiectând fiecare punct al obiectului în planul ecran. Astfel, un punct care are coordonatele observator (*xo*,*yo*,*zo*), va avea coordonatele plane (*xr*,*yr*).

În figura 2.17 se poate observa în detaliu proiecția coordonatei *xo* a unui punct pe planul de proiecție. B reprezintă proiecția pe planul xO'z a punctului. Din asemănarea triunghiurilor O'AB și O'A'B' rezultă: $xr = \frac{D \cdot xo}{zo}$. În mod asemănător obținem și $yr = \frac{D \cdot yo}{zo}$.

Observație. În figura 2.17 planul de proiecție se află după obiect.

Schimbările efectuate asupra unghiurilor θ și φ permit vizualizarea obiectului din poziții diferite. Schimbările valorii *R* permit observarea obiectului de la distanțe diferite. O consecință a modificării lui *R* este mărirea sau diminuarea obiectului, astfel:

- dacă *R* se micșorează, obiectul se mărește;

- dacă *R* crește, obiectul se micșorează.

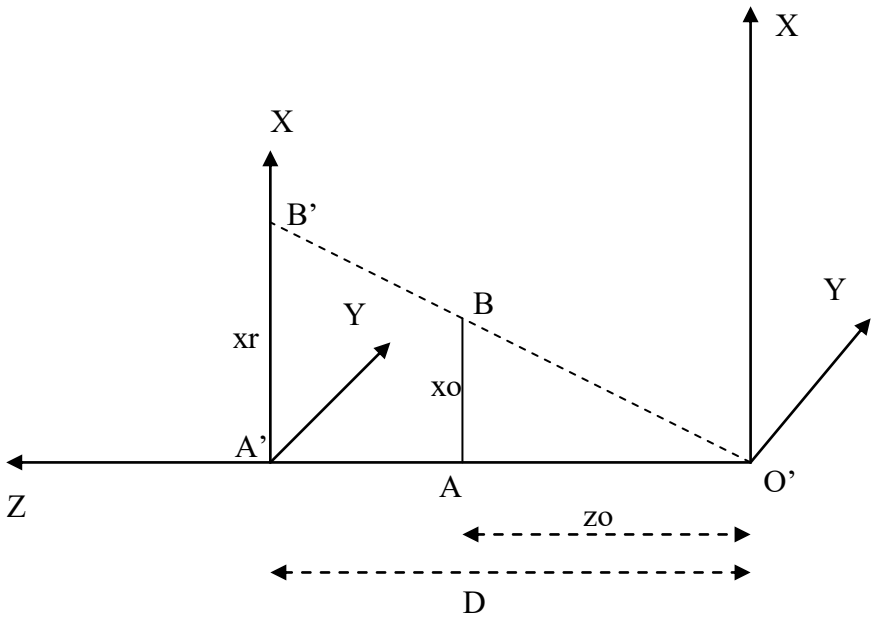

Figura 2.17 Proiecția

O altă cale prin care se poate mării sau micșora imaginea obiectului este modificarea distanței *D* de la ecranul de proiecție la observator.

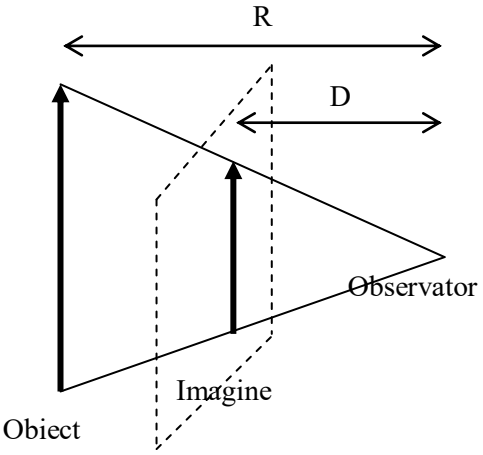

Figura 2.18 Relația dintre *R* și *D*

Deoarece atât *R* cât și *D* influențează mărimea imaginii obiectului, este foarte importantă înțelegerea rolului specific al fiecăruia dintre cei doi parametri. Datorită proiecției în perspectivă, un obiect situat foarte aproape de observator va fi puternic deformat și cu cât distanța scade cu atât deformarea va fi mai puternică. Pentru a diminua aceste deformări orice modificare a parametrului *R* trebuie însoțită de o ***modificare compensatorie*** a parametrului *D* [2]. Acest lucru este necesar deoarece în timp ce modificările asupra lui *R* duc la o deformare a obiectului, modificările lui *D* nu au efect decât asupra taliei obiectului.

2.2.4 Decupajul în grafica 3D

Dacă în grafica 2D o zonă decupată din fereastră apare sub forma unei ferestre de vizualizare, în grafica 3D se operează cu noțiunea de ***volum de vizualizare*** [2](Figura 2.19). Volumul de vizualizare are o formă piramidală, cu vârful în originea sistemului de coordonate observator și baza aflată la o distanță *D* față de acesta. Forma de piramidă a volumului de vizualizare permite formularea ecuațiilor matematice de decupare într-o manieră simplă.

Decupajul constă în trasarea dintr-un obiect doar a părții care se află în cadrul volumului de vizualizare . Pentru aceasta trebuie indentificate punctele obiectului care se află în cadrul volumului precum și intersecțiile dintre liniile obiectului și fețele volumului de vizualizare.

Condițiile de vizibilitate ale punctelor. Se notează cu *EX* semilățimea bazei și cu *EY* semilungimea ei. Planul superior al piramidei poate fi redus la o dreaptă ce trece prin origine și prin punctul *a*. Ecuația sa este Y = $\frac{EY}{D}Z$ (Figura 2.20).

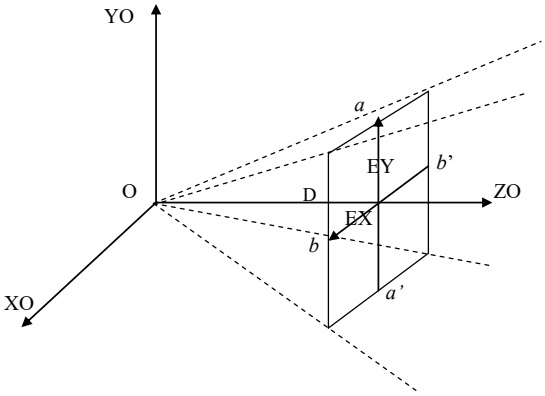

Figura 2.19 Volumul de vizualizare

Asemănător, planul inferior trece prin originea O și punctul *a'* Ecuația planului inferior este: Y = $\frac{-EY}{D}Z$. Planul dreapta se reduce la o dreaptă ce trece prin originea O și prin punctul *b*, iar planul stânga se reduce la o dreaptă ce trece prin O și *b'*: X = $\frac{EX}{D}Z$, X = $\frac{-EX}{D}Z$ (Figura 2.20).

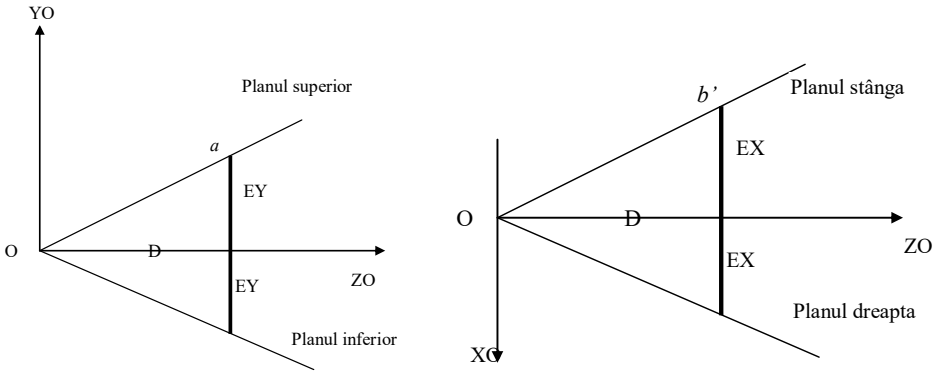

Figura 2.20 Condițiile de vizibilitate în raport cu planurile superior, inferior, stânga și dreapta

Pentru a fi vizibil, un punct trebuie să aparțină volumului de vizualizare. Dacă se consideră un punct oarecare al spațiului P($x1$,$y1$,$z1$) condițiile de vizibilitate referitoare la acest punct sunt următoare:

$y1 \le \frac{EY}{D} z1$ pentru a fi sub planul superior,

$y1 \ge \frac{-EY}{D} z1$ pentru a fi peste planul inferior,

$x1 \ge \frac{-EX}{D} z1$ pentru a fi la dreapta planului stâng,

$x1 \le \frac{EX}{D} z1$ pentru a fi la stânga planului drept.

Intersecția unei drepte oarecare cu unul din plane. Ecuația unei drepte ce trece prin două puncte ($x1$,$y1$,$z1$) și ($x2$,$y2$,$z2$) este: $\frac{x-x1}{x2-x1} = \frac{y-y1}{y2-y1} = \frac{z-z1}{z2-z1}$.

Dacă se notează cu *t* valoarea acestor rapoarte, se obțin ecuațiile parametrice ale unei drepte trecând prin două puncte din spațiu:

$$\begin{cases} x = t(x2-x1)+x1 \\ y = t(y2-y1)+y1 \\ z = t(z2-z1)+z1 \end{cases} \quad (*)$$

Pentru a determina *intersecțile cu cele patrui plane* se înlocuiesc valorile *x*, *y* și *z* în ecuațiile corespunzătoare. Rezultă următoarele valori pentru *t*:

- pentru intersecția cu planul superior, t = $\dfrac{\frac{EY}{D}z1 - y1}{y2 - y1 - \frac{EY}{D}(z2-z1)}$,

- pentru intersecția cu planul inferior t = $\dfrac{\frac{EY}{D}z1 - y1}{y2 - y1 + \frac{EY}{D}(z2-z1)}$,

- pentru intersecția cu planul lateral stânga t= $\dfrac{\frac{EY}{D}z1 - y1}{y2 - y1 + \frac{EY}{D}(z2-z1)}$,

- pentru intersecția cu planul lateral dreapta t = $\dfrac{\frac{EY}{D}z1 - y1}{y2 - y1 + \frac{EY}{D}(z2-z1)}$.

Pe baza valorilor lui *t* se determină punctul de intersecție (*x*,*y*,*z*) prin înlocuirea valorilor corespunzătoare în ecuațiile (*).